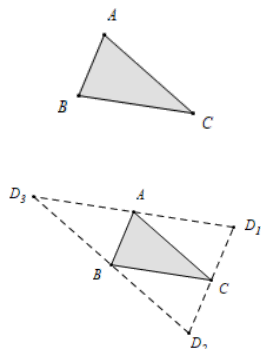


第2讲二次函数与四边形存在性

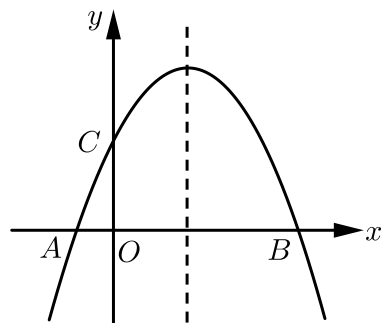
1. 平行四边形

如图，在平面内找一点D，以A、B、C、D为顶点的四边形为平行四边形．



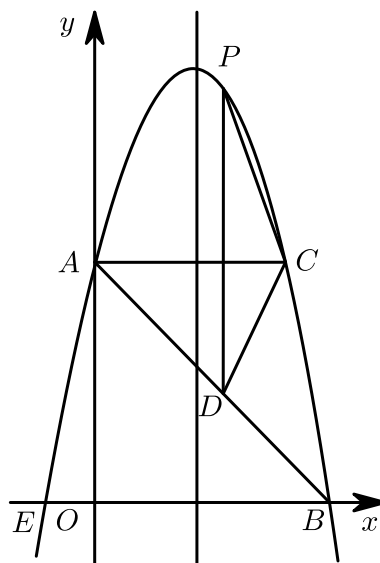
典题精练1

1. 如图，抛物线经过 $A(-1, 0)$ ， $B(3, 0)$ ， $C(0, \frac{3}{2})$ 三点．



- (1) 求抛物线的解析式．
- (2) 在抛物线的对称轴上有一点P，使 $PA + PC$ 的值最小，求点P的坐标．
- (3) 点M为x轴上一动点，在抛物线上是否存在一点N，使以A, C, M, N四点构成的四边形为平行四边形？若存在，求点N的坐标；若不存在，请说明理由．

2. 如图，在平面直角坐标系中，抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 的顶点坐标为 $(2, 9)$ ，与 y 轴交于点 $A(0, 5)$ ，与 x 轴交于点 E 、 B 。

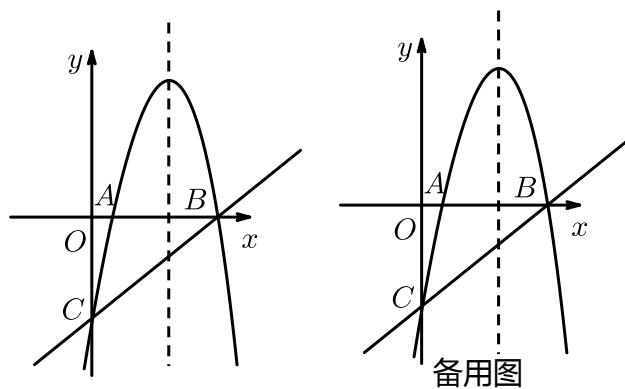


- (1) 求二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的表达式。
- (2) 过点 A 作 AC 平行于 x 轴，交抛物线于点 C ，点 P 为抛物线上的一点（点 P 在 AC 上方），作 PD 平行于 y 轴交 AB 于点 D ，问当点 P 在何位置时，四边形 $APCD$ 的面积最大？并求出最大面积。
- (3) 若点 M 在抛物线上，点 N 在其对称轴上，使得以 A 、 E 、 N 、 M 为顶点的四边形是平行四边形，且 AE 为其一边，求点 M 、 N 的坐标。

 典题精练2

3. 已知抛物线 $y = ax^2 - 2x + c$ (a, c 为常数, $a \neq 0$) 与直线 $y = kx + b$ 都经过 $A(0, -3)$, $B(3, 0)$ 两点, P 是该抛物线上的一个动点, 过点 P 作 x 轴的垂线交直线 AB 于点 Q .
- (1) 求此抛物线和直线 AB 的解析式.
- (2) 当点 P 在直线 AB 下方时, 求 $PQ + \sqrt{2}BQ$ 取得最大值时点 P 的坐标.
- (3) 设该抛物线的顶点为 C , 直线 AB 与该抛物线的对称轴交于点 E . 当以点 P, Q, C, E 为顶点的四边形是平行四边形时, 求点 P 的坐标.

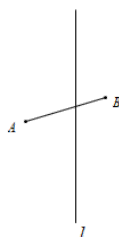
4. 如图，抛物线 $y = ax^2 + 6x + c$ 交 x 轴于 A 、 B 两点，交 y 轴于点 C ，直线 $y = x - 5$ 经过点 B 、 C 。



- (1) 求抛物线的解析式。
- (2) 过点 A 作 $AM \perp BC$ 于点 M ，过抛物线上一动点 P (不与点 B 、 C 重合)，作直线 AM 的平行线交直线 BC 于点 Q ，若以点 A 、 M 、 P 、 Q 为顶点的四边形是平行四边形，求点 P 的横坐标。

2. 矩形

有一个角是 _____ 的 _____ 是矩形．因此，矩形存在性问题可转化为 _____ 存在性加 _____ 存在性问题．如点C是直线l上一点，在平面内找一点D使得以点A、B、C、D为顶点的四边形为矩形．

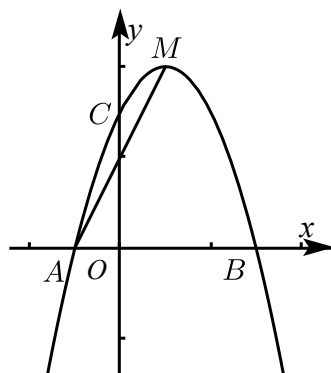


第一步，由“两线一圆”，先在直线l上找到点C使得 $\triangle ABC$ 为直角三角形，这样，就相当于找到了矩形的一半，满足情况的点C有 _____ 个；

第二步，由“平移法”或“中点法”找到点D使得以点A、B、C、D为顶点的四边形为平行四边形，这样作出的平行四边形就是矩形．

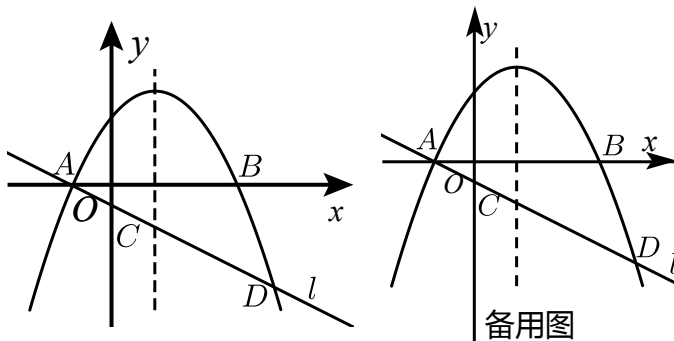
典题精练

5. 如图，抛物线 $y = -x^2 + bx + c$ 与 x 轴交于A、B两点（点A在点B左侧），与 y 轴交于点C，已知 $\tan \angle CAB = 3$ ， $OB = OC$ ．



- (1) 求抛物线解析式．
- (2) 点M是抛物线顶点，点P是y轴上一点，点Q是坐标平面内一点，以A、M、P、Q为顶点的四边形是矩形，求点Q坐标．

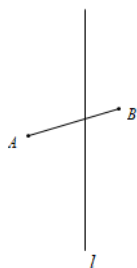
6. 如图所示，在平面直角坐标系 xOy 中，抛物线 $y = ax^2 - 2ax - 3a (a < 0)$ 与 x 轴交于 A, B 两点（点 A 在点 B 的左侧），经过点 A 的直线 $l: y = kx + b$ 与 y 轴负半轴交于点 C ，与抛物线的另一个交点为 D ，且 $CD = 4AC$ 。



- (1) 求 A, B 两点的坐标及抛物线的对称轴。
- (2) 求直线 l 的函数表达式（其中 k, b 用含 a 的式子表示）。
- (3) 点 E 是直线 l 上方的抛物线上的动点，若 $\triangle ACE$ 的面积的最大值为 $\frac{5}{4}$ ，求 a 的值。
- (4) 设 P 是抛物线对称轴上的一点，点 Q 在抛物线上，以点 A, D, P, Q 为顶点的四边形能否成为矩形？若能，求出点 P 的坐标。若不能，请说明理由。

3. 菱形

有一组 _____ 相等的 _____ 是菱形．因此，菱形存在性问题可转化为 _____ 存在性加 _____ 存在性问题．如点C是直线l上一点，在平面内找一点D使得以点A、B、C、D为顶点的四边形为菱形．



第一步，由“两圆一线”，先在直线l找到点C使得 $\triangle ABC$ 为等腰三角形，这样，就相当于找到了菱形的一半，满足情况的点C有 _____ 个；

第二步，由“平移法”或“中点法”找到点D使得以点A、B、C、D为顶点的四边形为平行四边形，这样作出的平行四边形就是菱形．

典题精练

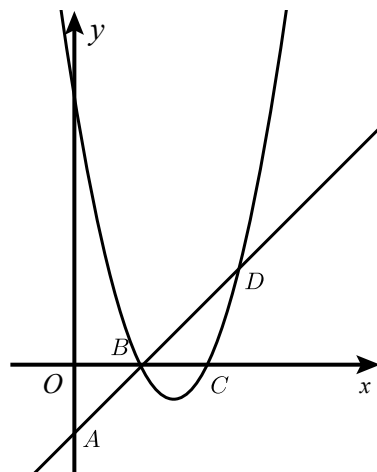
7. 二次函数 $y = ax^2 + 2x + c$ 的图象经过点 $C(0, 3)$ ，与 x 轴分别交于点A，点 $B(3, 0)$ ，点P是直线BC上方的抛物线上一动点．

(1) 求该二次函数的解析式．

(2) 连接 PO ， PC ，将 $\triangle POC$ 沿 y 轴翻折，得到 $\triangle P'OC$ ，当四边形 $POP'C$ 为菱形时，求点P的坐标．

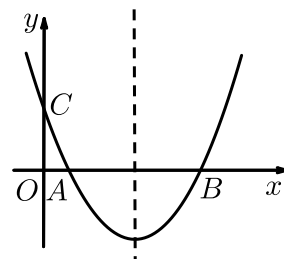
(3) 当四边形 $ACPB$ 的面积 S 最大时，求点P的坐标．

8. 已知抛物线 $y = ax^2 + bx + 8$ ($a \geq 1$) 过点 $D(5, 3)$ ，与 x 轴交于点 B 、 C (点 B 、 C 均在 y 轴右侧) 且 $BC = 2$ ，直线 BD 交 y 轴于点 A 。

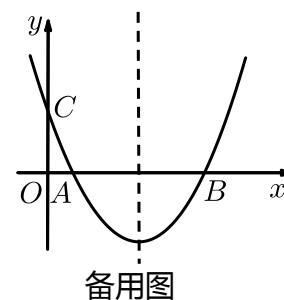


- (1) 求抛物线的解析式。
- (2) 在直线 BD 上是否存在一点 P 和平面内一点 Q ，使以 Q 、 P 、 B 、 C 四点为顶点的四边形为菱形？若存在，请直接写出点 P 的坐标；若不存在，请说明理由。

9. 如图，抛物线 $y = ax^2 + bx + \frac{5}{2}$ 过点 $A(1, 0)$ ， $B(5, 0)$ ，与 y 轴相交于点 C 。



- (1) 求抛物线的解析式。
- (2) 定义：平面上的任一点到二次函数图象上与它横坐标相同的点的距离，称为点到二次函数图象的垂直距离。如：点 O 到二次函数图象的垂直距离是线段 OC 的长。已知点 E 为抛物线对称轴上的一点，且在 x 轴上方，点 F 为平面内一点，当以 A, B, E, F 为顶点的四边形是边长为 4 的菱形时，请求出点 F 到二次函数图象的垂直距离。
- (3) 在 (2) 的条件下，当点 F 到二次函数图象的垂直距离最小时，在以 A, B, E, F 为顶点的菱形内部是否存在点 Q ，使得 AQ, BQ, FQ 之和最小，若存在，请求出最小值。若不存在，请说明理由。



4. 正方形

有一组 ____ 相等且有一个角是 ____ 的 ____ 是正方形．因此，正方形存在性问题可转为 ____ 存在性加 ____ 存在性问题．如在平面内找两点C和D，使得以点A、B、C、D为顶点的四边形为正方形．

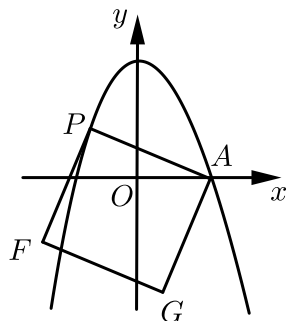


第一步，构造“一线三直角”全等模型先找到点C使得 $\triangle ABC$ 为等腰直角三角形，这样，就相当于找到了正方形的一半；

第二步，由“平移法”或“中点法”找到点D使得以点A、B、C、D为顶点的四边形为平行四边形，这样作出的平行四边形就是正方形．

典题精练

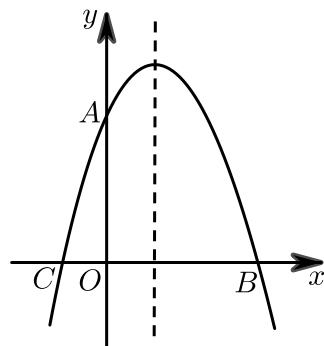
10. 在平面直角坐标系中，抛物线 $y = -x^2 + bx + c$ 经过点 $A(2, 0)$ 和点 $(-1, 2)$ ．



(1) 求抛物线的解析式．

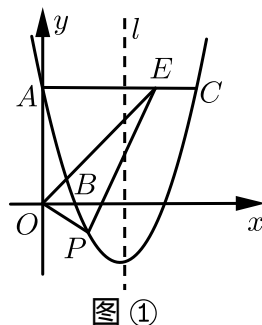
(2) $P(m, t)$ ($m < 2$) 是抛物线上一动点，连接 PA ．以 PA 为边作图示一侧的正方形 $APFG$ ，随着点 P 的运动，正方形的大小与位置也随之改变，当顶点 F 或 G 恰好落在 y 轴上时，求对应的 P 点坐标．

11. 如图，对称轴为 $x = 1$ 的抛物线经过 $A(0, 3)$ ， $B(3, 0)$ 两点，抛物线与 x 轴的另一交点为 C 。



- (1) 求抛物线的解析式。
- (2) P 为抛物线上的动点，直线 PC 交抛物线对称轴于点 D ，连接 AP ， AD ， AC ，若 $\triangle PAD$ 与 $\triangle PAC$ 面积之比为 $1 : 3$ ，求点 P 的坐标。
- (3) 点 M 在抛物线上，点 N 在对称轴上，点 Q 在坐标平面内，当四边形 $BMNQ$ 为正方形时，直接写出点 Q 的坐标。

12. 如图①，已知抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 的图象经过点 $A(0, 3)$ 、 $B(1, 0)$ ，其对称轴为直线 $l: x = 2$ ，过点 A 作 $AC \parallel x$ 轴交抛物线于点 C ， $\angle AOB$ 的平分线交线段 AC 于点 E ，点 P 是抛物线上的一个动点，设其横坐标为 m 。



- (1) 求抛物线的解析式。
- (2) 若动点 P 在直线 OE 下方的抛物线上，连接 PE 、 PO ，当 m 为何值时，四边形 $AOPE$ 的面积最大，并求出其最大值。
- (3) 如图②， F 是抛物线的对称轴 l 上的一点， Q 是坐标平面内一点，在抛物线上是否存在点 P 使以 P 、 O 、 F 、 Q 为顶点且 OF 为对角线的四边形是正方形？若存在，直接写出所有符合条件的点 P 的坐标；若不存在，请说明理由。

